ՀՀ Գիտությունների ազգային ակադեմիայի

Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Կարապետյան Կարեն Իսկանդարի

ԼՐԻՎ ԳԼԽԱՐԿՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԱՖԻՆԱԿԱՆ $AG(n, 3)$ և ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ $PG(n, 3)$ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ե. 13.05 «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2024

....

Институт проблем информатики и автоматизации

Национальной академии наук РА

Карапетян Карен Искандарович

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНЫХ ШАПОК В АФФИННОЙ $AG(n, 3)$ И ПРОЕКТИВНОЙ $PG(n, 3)$ ГЕОМЕТРИЯХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности Е. 13.05 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Ереван – 2024

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.մաթ.գիտ.թեկնածու Ի. Ա. Կարապետյան

Պաշտոնական ընդիմախոսներ՝ ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր....

ֆիզ.մաթ.գիտ.թեկնածու ....

Առաջատար կազմակերպություն՝ ....

Պաշտպանությունը կայանալու է 2024 թ. հունիսի ..-ին, ժամը ..: 00-ին

ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում գործող 037 « Ինֆորմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում:

Հասցեն 0014, ք. Երևան, Պ. Սևակի փող. 1

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2024 թվականի մայիսի ..-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական

քարտուղար, ֆիզ.մաթ.գիտ.դոկտոր՝ Մ. Ե. Հարությունյան

....

Тема диссертации утверждена в Институте проблем информатики и автоматизации НАН РА.

Научный руководитеь: кандидат физ.-мат. наук И. А. Карапетян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук ....

кандидат физ.-мат. наук ....

Ведущая организация ....

Защита состоится ...июня 2024 г. в 15:...часов на заседании специализированного совета 037 « Информатика» действующего в институте проблем информатики и автоматизации НАН РА по адресу 0014, г. Ереван, ул. П. Севака 1.

С диссертации можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан ...мая 2024г.

Ученый секретарь специализированного

совета доктор физ.-мат. наук М. Е. Арутюнян

Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

Թեմայի արդիականությունը: Ատենախոսությունը նվիրված է լրիվ գլխարկների կառուցմանը n-չափանի աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում Գալուայի երեք տարր ունեցող $F_3 = \{0,1,2\}$ դաշտի վրա: Դիտարկվող խնդիրը, ընդհանուր դրվածքով, սերտորեն առնչվում է դիսկրետ մաթեմատիկայի մի շարք բնագավառների խնդիրների հետ: Մասնավորապես, այն սերտորեն կապված է վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման, Շտեյների եռյակների, քարտերի բազմություն խաղի (card game SET), գծային կոդերի կառուցման, Աբելյան խմբերում երեք անդամ ունեցող թվաբանական պրոգրեսիաներ չպարունակող բազմությունների հզորությունների գնահատման, պարզ թվերի տեսության, և այլ բնագավառների խնդիրների հետ: Վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման խնդիրը գրականությունում ավելի շատ հայտնի է որպես կոմբինատոր նախագծում (Combinatorial Designe) [21-23, 26, 96] կամ բլոկ սխեմաներ [60] անվանումներով: Վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման խնդրով առաջինը զբաղվել է V. Yates 1935 թվականին [113] աշխատանքում: Ելնելով խնդրի կարևոր գործնական կիրառություններից հետագայում այն մեծ զարգացում է ապրել և բավականին լուրջ ու խորը գիտական արդյունքներ են ստացվել [20-23, 26, 47, 60, 96, 110, 113] աշխատանքներում: R. C. Bose 1947 թվականին [21] աշխատանքում, որը նվիրված է վիճակագրական վերլուծության փորձերի նախագծման խնդրի ուսումնասիրմանը, ձևակերպել է նաև կոմբինատոր նախագծման հետ սերտորեն առնչվող հետևյալ խնդիրը: Տրված d բնական թվի համար n-չափանի աֆինական $AG(n,q)$ և/կամ պրոյեկտիվ $PG(n,q)$ երկրաչափություններում q տարր պարունակող Գալուայի F_q դաշտի վրա գտնել մեծագույն հզորություն ունեցող կետերի այնպիսի բազմություն և դրա հզորությունը, որ այդ բազմության կամայական d հատ կետեր լինեն գծորեն անկախ: Հետագայում այդպիսի բազմությունները $d=3$ դեպքում կոչվեցին գլխարկներ (cap) [93]:

Ընդհանուր դեպքում աֆինական $AG(n,q)$ կամ պրոյեկտիվ $PG(n,q)$ երկրաչափություններում կետերի $C_{n,3}$ բազմությունը կոչվում է գլխարկ, եթե այն չի պարունակում իրարից տարբեր երեք համագիծ կետեր: Դժվար չէ տեսնել, որ գլխարկները $AG(n,3)$-ում կետերի այնպիսի բազմություններն են, որոնք չեն պարունակում միևնույն ուղղի վրա գտնվող երեք տարբեր կետեր: Այսինքն, եթե $C_{n,3} \subseteq AG(n,3)$ ենթաբազմությունը գլխարկ է, ապա դրա զույգ առ զույգ իրարից տարբեր $x,y,z \in C_{n,3}$ կետերի կամայական եռյակի համար տեղի ունի $x+y+z \neq 0$(mod 3) (*) անհավասարությունը: Ակնհայտ է, որ (*) անհավասարությունը կարելի է գրել նաև $y-x \neq z-y$(mod 3) տեսքով: Ուստի գլխարկը երեք անդամ ունեցող թվաբանական պրոգրեսիա չպարունակող կետերի բազմություն է $AG(n,3)$-ում: Նշենք, որ գլխարկի փոխարեն գրականությունում կախված n և q թվերից և գլխարկների կետերի տարածությունում առաջացրած ուրվագծերի տեսքից, հաճախ, օգտագործվում է նաև աղեղ (arc) [9, 66-67], կոր (curve) [85, 93], քառակուսի (quadric) [2, 107], ձվաձև (ovoid) [98-100, 109], կոն (conic) [66-67] և այլ տերմիններ: R. C. Bose 1947 թվականին այդ նույն [21] աշխատանքում որոշ n և q թվերի համար ստացել է մեծագույն գլխարկների հզորությունների հասանելի վերին գնահատականներ: Հետագայում ստացվել են մեծագույն գլխարկների նկարագրությունները և դրանց քանակները $AG(n,q)$ և $PG(n,q)$ երկրաչափություններում $n=2,3$ և բազմաթիվ q-երի համար [1-9, 11, 14-17, 25, 29, 31-35, 38- 45, 50-51, 61- 64, 68, 85, 87- 90, 93, 98-100, 107, 109], որտեղ q-ն պարզ թիվ է կամ պարզ թվի աստիճան: Այժմ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում մեծագույն գլխարկների հզորությունների ճշգրիտ արժեքները հայտնի են միայն $n \in [1,2,\dots,6]$ թվերի համար [31, 39, 42, 44, 61, 90, 92]: Ընդհանուր դեպքում, ինչպես նշում է նաև N. D. Versluis 2017 թվականի [112] աշխատանքում և վերը նշվածից, քիչ բան է հայտնի գլխարկների կառուցման և դրանց մեծագույն հզորությունների մասին, հատկապես, աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափություններում: Աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափություններում գլխարկների կառուցումը, հիմնականում, հիմնված է երկու պարզ մեթոդների՝ բազմապատկման և կրկնապատկման գործողությունների վրա: Գլխարկների կառուցման գործընթացում, հատկապես պրոեյկտիվ $PG(n,q)$ երկրաչափություններում, գերակայում է հետևյալ մոտեցումը: Նախ փոքր n-երի համար, հիմնվելով արդեն հայտնի արդյունքների վրա և օգտագործելով համակարգչային ծրագրերի փաթեթներ, կառուցում են հնարավորինս մեծ հզորությամբ գլխարկներ (կոչվում են ատոմներ) [32-35, 39, 41, 43, 45, 50, 68, 88-89, 92, 95]: Հետո օգտագործելով բազմապատկման(բազմապատկման ընդհանրացում) գործողությունը [37] և ռեկուրսիվ կոնստրուկցիաներ [40] կառուցում են գլխարկներ կամայական n-ի համար: Չնայած Որոշ հեղինակներ անգամ նշում են, որ մեծագույն գլխարկների կառուցման և դրանց հզորությունների որոշման խնդիրը դժվար է [37, 66], բայց մինչ այժմ հայտնի չէ այն P թե NP-լրիվ (NP-դժվար) դասից է:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և դրանում դիտարկված խնդիրները: Աշխատանքի հիմնական նպատակը մեծ հզորությամբ լրիվ գլխարկների կառուցման նոր մեթոդների մշակումն է n-չափանի աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում Գալուայի երեք տարր ունեցող $F_3 = \{0,1,2\}$ դաշտի վրա:

Հետազոտության օբեկտները: Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներն են աֆինական $AG(n,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափությունները Գալուայի երեք տարր ունեցող $F_3 = \{0,1,2\}$ դաշտի վրա և դրանցում լրիվ գլխարկները:

Հետազոտության մեթոդները; Հետազոտությունները իրականացված են բազմությունների տեսության և կոմբինատորիկայի մեթոդների օգնությամբ:

Գիտական նորույթը: Ատենախոսությունում առաջարկված է նոր մոտեցում լրիվ գլխարկների կառուցման համար աֆինական $AG(n,3)$ և պրոեյկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում: Ներմուծվել է P_n-բազմության, իսկ այնուհետև՝ լրիվ b-հագեցած P_n-բազմության հասկացությունը, որի կիրառմամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ կամայական n բնական թվի համար:

Պաշտպանությանը ներկայացվող հիմնական դրույթները: Պաշտպանությանն են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները:

1. Ստացվել է լրիվ b-հագեցած կետերի $A \subset AG(n,3)$ բազմությունը լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություն լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

2. Մշակվել են երեք մեթոդներ լրիվ b-հագեցած P_n-բազմությունների կառուցման համար, որոնց թվում են «երեք» $(\mathrm{n} \geq 3)$ և «վեց» $(\mathrm{n} \geq 6)$ անդրադարձ կոնստրուկցիաները կամայական բնական n թվի համար:

3. Լրիվ b-հագեցած P_n և P_m-բազմությունների օգնությամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n+m,3)$, $AG(n+m+1,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում կամայական բնական n թվի համար:
4. Լրիվ b-հագեցած կենտ P_n-բազմությունների օգնությամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ և $AG(n+1,3)$ երկրաչափություններում, որոնք ընդհանրացնում են որոշ հայտնի արդյունքները:
5. Եթե լրիվ b-հագեցած P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}-բազմություններից գոնե 2 հատը կենտ են, ապա «երեք» կոնստրուկցիայի միջոցով կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում:
6. Եթե լրիվ b-հագեցած P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, P_{n_4}, P_{n_5}, P_{n_6}-բազմություններից գոնե P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} կենտ են, ապա «վեց» կոնստրուկցիայի միջոցով կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան: Ստացված արդյունքները զեկուցվել են մի շարք միջազգային գիտաժողովներում Հայաստանում և ՀՀ Գիտությունների ազգային ակադեմիայի Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտի ընդհանուր սեմինարներում:

1. 8th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 26 - 30, 2011.
2. 10th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 28 - October 2, 2015.
3. 11th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25 - 29, 2017.
4. 12th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 23 - 27, 2019.
5. 13th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 27 - October 1, 2021.
6. 14th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25 – 30, 2023.

Հրապարակումները: Հրապարակվել են 10 գիտական աշխատանքներ, որոնցից 9-ը վերաբերում են ատենախոսության թեմային:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երկու գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից (113 անուն): Աշխատանքի ծավալը 105 էջ է:

Աշխատանքի բովանդակությունը:

Աշխատանքի ներածությունում նկարագրված է թեմայի արդիականությունը, նրանում դիտարկված խնդիրները և հիմնական նպատակը, հետազոտման մեթոդները, ինչպես նաև կապը դիսկրետ մաթեմատիկայի այլ բնագավառների խնդիրների հետ: Նկարագրված է նաև աշխատանքում ստացված արդյունքների գիտական նորույթը, գործնական կիրառությունը և պաշտպանությանը ներկայացվող հիմնական դրույթները:

Ատենախոսության առաջին գլուխը նվիրված է մեր կողմից ներմուծված լրիվ b-հագեցած P_n-բազմությունների կառուցման մեթոդներին աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում, որտեղ n-ը կամայական բնական թիվ է: Աշխատության առաջին գլխի 1. 1 պարագրաֆում բերված են հիմնական նշանակումները և սահմանումները: $AG(n,3)$–ի կետերի նշանակման համար կիրառել ենք գիտական գրականությունում ընդունված գրելաձևը օգտագործելով հունական և լատինական տառերը $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$,…, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$,… և այլն: Բնական թվերի սկզբնական $\{1,2,\cdots,n\}$ միջակայքը նշանակված է $[1,\ n]$-ով: B_n–ով նշանակենք $AG(n,3)$ տարածության հետևյալ $\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid x\in AG(n,3), x_i=1,2;\ i\in\ [1,n]\}$ կետերի բազմությունը: B_n'-ով նշանակենք B_n–ի այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի 1-ին հավասար կոորդինատների քանակը կենտ է և B_n''-ով B_n–ի մնացած կետերի բազմությունը՝ $B_n''=B_n\setminus B_n'$: Պարզ է, որ B_n''-ի յուրաքանչյուր կետի 1-ին հավասար կոորդինատների քանակը զույգ է և $B_n'\cup B_n''=B_n$: $AG(n,3)$ աֆինական երկրաչափության x կետի 0-ին հավասար կոորդինատների բազմությունը նշանակենք $x(0)=\{i\,|x_i=0, i\in[1,n]\}$ –ով: Տրված $\alpha\in\ AG(n,3)$ կետի համար նշանակենք $X(\alpha)=\{x|\ x\in AG(n,3), x(0)=\alpha(0)\}$: Վերջավոր A բազմության տարրերի քանակը նշանակենք $|A|$-ով: Աշխատանքում մեծագույն գլխարկների հզորությունները $AG(n,q)$-ում և $PG(n,q)$-ում նշանակված են, համապատասխանաբար, $c_{n,q}$-ով և $c'_{n,q}$-ով:

Սահմանում 1. 1: Հիշեցնենք, որ երկու $A\subseteq AG(n,\ 3)$ և $B\subseteq AG(m,3)$

Բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը (կցումը) սահմանվում է որպես $AG(n+m,$ $3)$ աֆինական երկրաչափության կետերի հետևյալ $\{x=(x_1,x_2,\dots,x_{n+m})|\ x^1=$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A, x^2 = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in B\}$ բազմությունը և նշանակվում է AB-ով: Նման ձևով է սահմանվում երեք, չորս և այլ քանակությամբ բազմությունների կցումը:

Սահմանում 1. 2: $AG(n, 3)$ աֆինական երկրաչափության կետերի A բազմությունը կանվանենք P_n-բազմություն, եթե այն բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

(i) ցանկացած երկու տարբեր $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ և $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ կետերի համար գոյություն ունի այնպիսի i կոորդինատ, որ $\alpha_i = \beta_i = 0$, որտեղ $i \in [1, n]$;

(ii) ցանկացած երեք տարբեր $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ կետերի համար տեղի ունի $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 (mod\ 3)$ անհավասարությունը:

Սահմանում 1. 3: P_n-բազմությունը կանվանենք լրիվ, եթե գոյություն չունի այնպիսի $\alpha \in AG(n, 3)$ կետ, որ $\alpha \notin P_n$ և $P_n \cup \{\alpha\}$–ն ևս լինի P_n-բազմություն:

Սահմանում 1. 4: P_n-բազմությունը կանվանենք *b*-հագեցած, եթե կամայական $\alpha \in P_n$ կետի համար տեղի ունի $\mathrm{X}(\alpha) \subseteq P_n$ առնչությունը, որտեղ $b \in [1, 2]$:

Սահմանում 1. 5: Բազմությունը կոչվում է լրիվ *b*-հագեցած, եթե այն մեկ այլ *b*-հագեցած բազմության սեփական ենթաբազմություն չէ:

Սահմանում 1. 6: $AG(n, 3)$ աֆինական երկրաչափության կետերի $C_{n,3}$ բազմությունը կոչվում է գլխարկ, եթե $C_{n,3}$-ին պատկանող և իրարից տարբեր ոչ մի երեք α, β, γ կետերը համագիծ չեն:

Դժվար չէ համոզվել, որ եթե իրարից տարբեր երեք α, β, γ կետերը համագիծ չեն, ապա այդ կետերի համար տեղի ունի $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 (mod\ 3)$ անհավասարությունը:

Սահմանում 1. 7: Գլխարկը կոչվում է լրիվ, եթե այն մեկ այլ գլխարկի սեփական ենթաբազմություն չէ:

Սահմանում 1. 8: P_n-բազմությունը կանվանենք կենտ, եթե յուրաքանչյուր $\alpha \in P_n$ կետի համար $|\alpha(0)|$-ն կենտ թիվ է և զույգ, եթե յուրաքանչյուր $\alpha \in P_n$ կետի համար $|\alpha(0)|$-ն՝ զույգ թիվ է:

Առաջին գլխի 1. 2 պրագրաֆում շարադրված են հիմնական օժանդակ պնդումներն և լեմաները: Իսկ առաջին գլխի 1.3 պարագրաֆը նվիրված է b-հագեցած P_n-բազմությունների նկարագրությանը և ապացուցված է հետևյալ

Թեորեմ 1. **3. 1 [78]**: Որպեսզի աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափության կետերի A բազմությունը լինի լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություն անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի լրիվ b-հագեցած բազմություն և բավարարի հետևյալ երկու պայմաններին.

(1) ցանկացած երկու տարբեր $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in A$ կետերի համար գոյություն ունի այնպիսի i կոորդինատ, որ $\alpha_i = \beta_i = 0$, որտեղ $i \in [1, n]$;

(2) ցանկացած երեք տարբեր $\alpha, \beta, \gamma \in A$ կետերի համար տեղի ունի $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0)$ կրկնակի հավասարությունը կամ գոյություն ունի այնպիսի j կոորդինատ, որ այդ երեք կետերից երկուսի՝ ասենք α–ի և β-ի j –րդ կոորդինատը բավարարի $\alpha_j = \beta_j = 0$ պայմանին, իսկ γ-ի j-րդ կոորդինատը՝ $\gamma_j \neq 0$:

Այդ նույն գլխի 1.4 պարագրաֆը նվիրված է P_n-բազմությունների կառուցման 1-ին մեթոդին, որն ելնելով արդեն կառուցված (տրված) P_n-բազմություններից $AG(n,3)$-ում հնարավորություն է ընձեռնում կառուցելու P_{n+m}-բազմություններ $AG(n+m,3)$-ում, որտեղ n, m-ը կամայական բնական թվեր են: Ապացուցված է հետևյալ

Թեորեմ 1. **4. 1**: Ցանկացած n և m բնական թվերի համար ճիշտ են հետևյալ երկու պնդումները:

1: Եթե P_n-բազմությունը լրիվ է, ապա P_nB_m և B_mP_n լրիվ P_{n+m}-բազմություններ են:

2**:** Եթե P_n-բազմությունը լրիվ b-հագեցած է, ապա P_nB_m և B_mP_n-ը լրիվ b-հագեցած բազմություններ են:

Առաջին գլխի 1.5 պարագրաֆը նվիրված է մեր կողմից մշակված լրիվ b-հագեցած P_n-բազմությունների կառուցման հիմնական մեթոդներից մեկի, այսպես կոչված «երեք» կոնստրուկցիայի: Առաջարկված է մի անդրադարձ բանաձև (սխեմա), որը ցանկացած n բնական թվի համար կառուցում է լրիվ b-հագեցած P_n -բազմություն, ունենալով $n = n_1 + n_2 + n_3$ ներկայացումը, որտեղ n_1, n_2, n_3 կամայական բնական թվեր են և $n \geq 3$: Ապացուցված է հետևյալ

Թեորեմ 1. 5. 1 [70, 71]: Հետևյալ անդրադարձ բանաձևը $P_n = P_{n_1} P_{n_2} B_{n_3} \cup P_{n_1} B_{n_2} P_{n_3} \cup B_{n_1} P_{n_2} P_{n_3}$ առաջացնում է լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություններ, որտեղ $n = n_1 + n_2 + n_3$, $P_1 = \{(0)\}$, $P_2 = \{(0,1),(0,2)\}$ սկզբնական բազմություններ են, n_1, n_2, n_3 կամայական բնական թվեր են և $n \geq 3$:

Հետևանք 1. 5. 1: Եթե P_{n_1}, P_{n_2} և P_{n_3}-բազմությունները լրիվ b-հագեցած են, ապա $P_n = P_{n_1} P_{n_2} B_{n_3} \cup P_{n_1} B_{n_2} P_{n_3} \cup B_{n_1} P_{n_2} P_{n_3}$ բազմությունը լրիվ b-հագեցած է, որտեղ $n = n_1 + n_2 + n_3$ և n_1, n_2, n_3 ցանկացած բնական թվեր են:

Հետևանք 1. 5. 2: Տրված n բնական թվի համար «երեք» կոնստրուկցիայով կարելի է կառուցել միմիանցից տարբեր C_{n-1}^2 հատ լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություններ, որտեղ $n \geq 3$:

Առաջին գլխի 1. 6 պարագրաֆում ներկայացված է մեր կողմից մշակված լրիվ b-հագեցած P_n-բազմությունների կառուցման երրորդ մեթոդը, այսպես կոչված «վեց» կոնստրուկցիա: Առաջարկված է մի անդրադարձ բանաձև (սխեմա), որը ցանկացած $n \geq 6$ բնական թվի համար կառուցում է լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություններ, ունենալով $n = \sum_1^6 n_i$ ներկայացումը, որտեղ $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ կամայական բնական թվեր են և $n \geq 6$:

Թեորեմ 1. 6. 1 [71]: Հետևյալ անդրադարձ բանաձևը՝ $P_n = \cup_1^{10} A_i$ առաջացնում է լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություններ, որտեղ $P_1 = \{(0)\}$, $P_2 = \{(0,1),(0,2)\}$ սկզբնական բազմություններ են, $n = \sum_1^6 n_i$, $n_1, n_2, \dots, n_6$ կամայական բնական թվեր են և

$$A_1 = P_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}B_{n_4}B_{n_5}B_{n_6}, \quad A_6 = B_{n_1}B_{n_2}P_{n_3}B_{n_4}P_{n_5}P_{n_6},$$

$$A_2 = P_{n_1}P_{n_2}B_{n_3}B_{n_4}B_{n_5}P_{n_6}, \quad A_7 = B_{n_1}P_{n_2}B_{n_3}P_{n_4}P_{n_5}B_{n_6},$$

$$A_3 = P_{n_1}B_{n_2}P_{n_3}B_{n_4}P_{n_5}B_{n_6}, \quad A_8 = B_{n_1}P_{n_2}B_{n_3}B_{n_4}P_{n_5}P_{n_6},$$

$$A_4 = B_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}P_{n_4}B_{n_5}B_{n_6}, \quad A_9 = P_{n_1}B_{n_2}B_{n_3}P_{n_4}B_{n_5}P_{n_6},$$

$$A_5 = B_{n_1}B_{n_2}P_{n_3}P_{n_4}B_{n_5}P_{n_6}, \quad A_{10} = P_{n_1}B_{n_2}B_{n_3}P_{n_4}P_{n_5}B_{n_6}:$$

Հետևանք 1. 6. 1: Եթե $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots, P_{n_6}$-ը լրիվ b-հագեցած բազմություններ են, ապա $P_n = \cup_1^{10} A_i$-ն լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություն է, որտեղ $n = \sum_1^6 n_i$ և $n_1, n_2, \ldots, n_6$ ցանկացած բնական թվեր են:

Հետևանք 1. 6. 2: Տրված n բնական թվի համար «վեց» կոնստրուկցիայով կարելի է կառուցել միմիանցից տարբեր C_{n-1}^5 հատ լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություններ, որտեղ $n \geq 6$:

Հետևանք 1. 6. 3: $|P_6| = 80$:

Թեորեմ 1. 6. 2 [73]: Տրված $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots, P_{n_6}$ լրիվ b-հագեցած բազմությունների կիրառմամբ «վեց» կոնստրուկցիայով կարելի է կառուցել իրարից տարբեր ճիշտ 12 հատ լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություններ, որտեղ $n = \sum_1^6 n_i$ և n_i-երը ցանկացած բնական թվեր են:

Մեծ հզորություններով լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություններ և հետևաբար մեծ գլխարկներ կառուցելու համար առաջին գլխի վերջին՝ 1.7 պարագրաֆում ձևակերպված է մի խնդիր:

Խնդիր [78]: Դիցուք $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ որև է վերջավոր բազմություն է և $A \subseteq S$ նրա կամայական ենթաբազմությունն է: Համարենք, որ A-ի կշիռը $2^{n-|A|}$ է և այն նշանակենք $w(A)$-ով: Պահանջվում է գտնել S բազմության ենթաբազմությունների այնպիսի $B = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ բազմություն, որ բավարարվեն հետևյալ երեք պայմանները.

(1) ցանկացած երկու A_i, $A_j \in B$ ենթաբազմությունների համար տեղի ունի $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ առնչությունը, որտեղ $1 \leq i, j \leq m$,

(2) ենթաբազմությունների կամայական եռյակի $A_i, A_j, A_k \in B$ համար գոյություն ունի այնպիսի $a_l \in S$ տարր, որ a_l-ն պատկանում է A_i, A_j, A_k ենթաբազմություններից միայն երկուսին, ասենք $a_l \in A_i$, $a_l \in A_j$, բայց $a_l \notin A_k$, որտեղ $1 \leq i, j, k \leq m$, $1 \leq l \leq n$,

(3) $\sum_1^m w(A_i)$-ը լինի մեծագույնը:

Ատենախոսության երկրորդ գլուխը նվիրված է գլխարկների կառուցմանը $AG(n, 3)$ և $PG(n, 3)$ երկրաչափություններում: Երկրորդ գլուխի 2.1 պարագրաֆում լրիվ b-հագեցած P_n և P_m-բազմությունների օգնությամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ $AG(n + m, 3)$ և $AG(n + m + 1, 3)$-ում: Ապացուցված թեորեմներից հետևում են մեծագույն գլխարկների հզորությունների որոշ հայտնի ստորին գնահատականներ:

Թեորեմ 2. 1. 1 [70, 72]: Եթե P_n և P_m-բազմությունները լրիվ b-հագեցած են, ապա $C_{n+m,3} = P_n B_m \cup B_n P_m$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է $AG(n + m, 3)$-ում, որտեղ n և m կամայական բնական թվեր են:

Հետևանք 2. 1. 1: $c_{n+m,3} \geq |P_n||B_m| + |B_n||P_m|$ կամայական բնական n և m թվերի համար:

Հետևանք 2. 1. 2: $c_{n+1,3} \geq 2|P_n| + |B_n|$ կամայական n բնական թվի համար:

Հետևանք 2. 1. 3 [41]: $c_{9,3} \geq 1056$, $c_{10,3} \geq 2240$:

Թեորեմ 2. 1. 2 [70, 72]: Եթե P_n և P_m-բազմությունները լրիվ b-հագեցած են, ապա $C_{n+m+1,3} = P_n P_m\{(0)\} \cup (P_n B_m \cup B_n P_m)\{(1)\} \cup B_{n+m}\{(2)\}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է $AG(n + m + 1,3)$-ում, որտեղ n և m կամայական բնական թվեր են:

Հետևանք 2. 1. 3: Ցանկացած n և m բնական թվերի համար ճիշտ է $c_{n+m+1,3} \geq |P_n||P_m| + |P_n||B_m|+|B_n||P_m|+|B_{n+m}|$, որտեղ P_n և P_m լրիվ b-հագեցած բազմություններ են:

Հետևանք 2. 1. 4: $c_{5,3} \geq 42$:

Նույն գլխի 2. 2 պարագրաֆում կառուցվում են գլխարկներ օգտագործելով լրիվ b-հագեցած կենտ P_n-բազմություններ:

Թեորեմ 2. 2. 1 [78]: Եթե P_n-ը լրիվ b-հագեցած կենտ բազմություն է, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B'_n$ լրիվ գլխարկ է:

Թեորեմ 2. 2. 2 [78]: Եթե P_n-ը լրիվ b-հագեցած կենտ բազմություն է, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B''_n$ լրիվ գլխարկ է:

Հետևանք 2. 2. 1 [25, 92]: $c_{6,3} \geq 112$:

Հետևանք 2. 2. 2: $c_{11,3} \geq 5504$:

Նշենք, որ ստացված վերջին ստորին գնահատականը առայժմ լավագույնն է և այն պարունակում է առնվազն 464 կետ ավելի, քան մեծագույն գլխարկը, որը կարելի է ստանալ հայտնիներից բազմապատկման գործողության միջոցով:

Սահմանում 2. 1 [78]: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in AG(n,3)$ կետի հայելային շրջում ասելով կհասկանանք $\hat{\alpha} = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1) \in AG(n,3)$ կետը:

Սահմանում 2. 2 [78]: P_n-բազմության հայելային շրջում ասելով կհասկանանք դրա բոլոր կետերի հայելային շրջումների բազմությունն և կնշանակենք $\widehat{P_n}$-ով:

Թեորեմ 2. 2. 3 [78]: Եթե P_n-ը լրիվ b-հագեցած կենտ բազմություն է, ապա $C_{n,3} = \widehat{P_n} \cup B'_n$ ($C_{n,3} = \widehat{P_n} \cup B''_n$) լրիվ գլխարկ է:

$AG(n,3)$-ում հետևյալ $e_{1,1} = (1,0,\dots,0)$, $e_{1,2} = (2,0,\dots,0)$, $e_{2,1} = (0,1,\dots,0)$, $e_{2,2} = (0,2,\dots,0)$, $\dots$, $e_{n,1} = (0,0,\dots,1)$, $e_{n,2} = (0,0,\dots,2)$ կետերի բազմությունը նշանակենք E_n-ով: Ապացուցված է հետևյալ

Թեորեմ 2. 2. 4 [78]: Դիցուք P_{2n}-ը լրիվ b-հագեցած կենտ բազմություն է և յուրաքանչյուր $\alpha \in P_{2n}$ կետի համար տեղի ունի $|\alpha(0)| \geq 3$ անհավասարությունը: Եթե $P_{2n} \cap \widehat{P_{2n}} = \emptyset$, ապա $C_{2n+1,3} = \{P_{2n} \cup B'_{2n}\}\{(0)\} \cup \{\widehat{P_{2n}} \cup B'_{2n}\}\{(1)\} \cup \{E_{2n}\}\{(2)\}$ բազմությունը գլխարկ է:

Նշենք, որ բերված են երեք օրինակներ, որոնք հիմնավորում են Թեորեմ 2. 2. 4-ում յուրաքանչյուր $\alpha \in P_{2n}$ կետի համար $|\alpha(0)| \geq 3$, $P_{2n} \cap \widehat{P_{2n}} = \emptyset$ և տարածության չափողականության զույգ լինելու պահանջների էական լինելը:

Հետևանք 2. 4. 1: $c_{7,3} \geq 236$ [25]:

Երկրորդ գլխի 2. 3 պարագրաֆում դիտարկված է «երեք» կոնստրուկցիայի օգնությամբ լրիվ գլխակների կառուցումը, երբ P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}-բազմություններից առնվազն երկուսը կենտ են: Ապացուցված թեորեմից հետևում է հայտնի և առայժմ լավագույն ստորին գնահատականը գլխարկների համար $AG(10,3)$-ում:

Թեորեմ 2. 3. 1: Դիցուք տրված P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} բազմությունները լրիվ b-հագեցած են: Եթե P_{n_1}, P_{n_2} և P_{n_3} բազմություններից գոնե երկուսը կենտ են, ասենք P_{n_1}և P_{n_2}-ը, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B'_{n_1} B'_{n_2} B_{n_3}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է, որտեղ $P_n = P_{n_1} P_{n_2} B_{n_3} \cup P_{n_1} B_{n_2} P_{n_3} \cup B_{n_1} P_{n_2} P_{n_3}$, $n = n_1 + n_2 + n_3$ և n_1, n_2, n_3-ը կամայական բնական թվեր են:

Հետևանք 2. 3. 1. $c_{10,3} \geq 2240$ [41]:

Երկրորդ գլխի 2. 4 պարագրաֆում դիտարկված է «վեց» կոնստրուկցիայի օգնությամբ լրիվ գլխակների կառուցումը, երբ P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, P_{n_4}, P_{n_5} և P_{n_6}-բազմություններից գոնե P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} կենտ են:

Թեորեմ 2. 4. 1 [78]: Դիցուք տրված P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, P_{n_4}, P_{n_5} և P_{n_6}-բազմությունները լրիվ b-հազեցած են: Եթե P_{n_1}, P_{n_2} և P_{n_3} բազմությունները կենտ են, ապա $C_{n,3} = P_n \cup B'_{n_1}B'_{n_2}B'_{n_3}B_{n_4}B_{n_5}B_{n_6}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է, որտեղ $P_n = \cup_1^{10} A_i$(A_i-երի համար տես Թեորեմ 1. 6. 1), $n = \sum_1^6 n_i$ և n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6-ը կամայական բնական թվեր են:

Երկրորդ գլխի վերջին 2. 5 պարագրաֆում ներկայացված է մեր կողմից պրոյեկտիվ $PG(n, 3)$-ում լրիվ գլխարկների կառուցման մի մեթոդ, որը նույնպես հիմնված է $AG(n, 3)$-ում լրիվ b-հազեցած P_n բազմության հասկացության վրա:

Թեորեմ 2. 5. 1 [74-76]: Եթե P_n-ը լրիվ b-հազեցած բազմություն է $AG(n, 3)$-ում, ապա $C'_{n,3} = P_n\{(1)\} \cup B_n^1\{(0)\}$ բազմությունը լրիվ գլխարկ է պրոյեկտիվ $PG(n, 3)$ երկրաչափությունում, որտեղ $B_n^1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)|\alpha_1 = 1, \alpha_i = 1, 2; 2 \le i \le n\}$ և n-ը կամայական բնական թիվ է:

Հետևանք 2. 5. 1: $c'_{n,3} \ge |P_n| + 2^{n-1}$:

Հետևանք 2. 5. 2: $c'_{6,3} \ge 112$ [61]:

Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Ատենախոսությունում առաջարկված է նոր մոտեցում լրիվ գլխարկների կառուցման համար աֆինական $AG(n, 3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n, 3)$ երկրաչափություններում, որը հիմնված է մեր կողմից ներմուծված լրիվ b-հազեցած P_n -բազմության հասկացության վրա:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

1. Ստացվել է լրիվ b-հագեցած $A \subset AG(n,3)$-ի կետերի բազմությունը լրիվ b-հագեցած P_n-բազմություն լինելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:
2. Մշակվել են լրիվ b-հագեցած P_n -բազմությունների կառուցման երեք մեթոդներ, այդ թվում «երեք» $(n \geq 3)$ և «վեց» $(n \geq 6)$ անդրադարձ կոնստրուկցիաները:
3. Լրիվ b-հագեցած P_n և P_m-բազմությունների օգնությամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n+m,3)$, $AG(n+m+1,3)$ և պրոյեկտիվ $PG(n,3)$ երկրաչափություններում կամայական բնական n և m թվերի համար, որոնցից հետևում են որոշ հայտնի արդյունքներ:
4. Լրիվ b-հագեցած կենտ P_n բազմությունների օգնությամբ կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ և $AG(n+1,3)$ երկրաչափություններում, որոնք ընդհանրացնում են որոշ հայտնի արդյունքներ:
5. Եթե լրիվ b-հագեցած P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} բազմություններից առնվազն երկուսը կենտ են, ապա «երեք» կոնստրուկցիայի միջոցով կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում:
6. Եթե լրիվ b-հագեցած P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, P_{n_4}, P_{n_5}, P_{n_6} բազմություններից առնվազն P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} կենտ են, ապա « վեց» կոնստրուկցիայի միջոցով կառուցվում են լրիվ գլխարկներ աֆինական $AG(n,3)$ երկրաչափությունում:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկը

1. K. Karapetyan, “Large Caps in Affine Space”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 28 - October 2, pp. 82-83, 2015. https://csit.am/2015/proceedings/DMCA/DMCA9.pdf
2. K. Karapetyan, “On the Complete Caps in Galois Affine Space AG(n,3)”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25 – 29, p. 205, 2017. https://csit.am/2017/Proceedings/DMCA/DMCA8.pdf
3. I. Karapetyan, K. Karapetyan, “On the Caps in Affine Space AG(n,3)”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 23 – 27, pp. 100-101, 2019. https://csit.am/2019/proceedings/DMCA/DMCA4.pdf

4. I. A. Karapetyan and K. I. Karapetyan, “The Complete Caps in Projective Geometry PG$(n, 3)$”, ԼՐԱԲԵՐ ԳԻՏԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ (ՀԱՊՀ), մաս 1, էջեր 35-44, 2021. ISBN:978-9939-79-027-5
5. Iskandar Karapetyan, Karen Karapetyan, “ Complete Caps in Projective Geometry PG$(n, 3)$”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 27 - October 1, pp. 57-60, 2021. https://csit.am/2021/proceedings/DMCA/DMCA_3.pdf
6. Karen I. Karapetyan, “Complete Caps in Affine Geometry $AG(n, 3)$”, Mathematical Problems of Computer Science 57, pp. 56-64, 2022. https://doi.org/10.51408/1963-0087
7. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “Complete Caps in $AG(n, 3)$”, Proceedings of International Conference Computer Science and Information Technolgies, Yerevan, Armenia, September 25-30, pp.135-136, 2023. https://doi.org/10.51408/csit2023_30
8. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “Complete Caps in Projective Geometry $PG(n, 3)$”, AIP Conference Proceedings, Vol. 2757, 040003, 2023. https://doi.org/10.1063/5.0135975
9. Iskandar Karapetyan and Karen Karapetyan, “Complete Caps in Affine Geometry $AG(n, 3)$”, CSIT2023, PRIA, submitted: 08 October, 2023. Pattern Recognition and Image Analysis, 2024, Vol. 34, No. 1, pp. 74–91. © Pleiades Publishing, Ltd., 2024. DOI: 10.1134/S1054661824010097

Abstract

In the thesis, a new approach is proposed to construct complete caps in affine $AG(n, 3)$ and projective $PG(n, 3)$ geometries, based on the notion of a complete b −saturated P_n-sets introduced by the author. The following results are presented in the work.

1. Necessary and sufficient conditions are obtained for the complete b-saturated set of points $A \subset AG(n, 3)$ to be a complete b-saturated P_n-set.

2. Three methods have been developed for constructing complete b −saturated P_n-sets, including «three » $(n \geq 3)$ and «six» $(n \geq 6)$ recurrent constructions.

3. Using complete b-saturated P_n and P_m-sets, some complete caps are constructed in affine $AG(n + m, 3)$, $AG(n + m + 1,3)$ and projective $PG(n, 3)$ geometries for arbitrary natural numbers n and m, implying some known results.

4. Using complete b-saturated odd P_n-sets, complete caps are constructed in the affine geometries $AG(n, 3)$ and $AG(n + 1,3)$, which generalize some known results.

5. If at least two of three complete b-saturated P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}-sets are odd, then using «three» construction complete caps are constructed in the affine geometry $AG(n, 3)$.

6. If at least P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} of six complete b-saturated P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, P_{n_4}, P_{n_5}, P_{n_6}-sets are odd, then using «six» construction complete caps are constructed in the affine geometry $AG(n, 3)$.

Резюме

В диссертации предлагается новый подход к построению полных шапок в аффинной $AG(n, 3)$ и проективной $PG(n, 3)$ геометриях, основанный на понятии полных b-насыщенных P_n-множества введенный автором. В тезисе представляются следующие результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы полное b-насыщенное множество точек $A \subset AG(n, 3)$ было полным b-насыщенным P_n-множеством.

2. Разработаны три метода построения полных b-насыщенных P_n-множеств, в том числе «три» $(n \geq 3)$ и «шесть» $(n \geq 6)$ рекуррентные конструкции.

3. Используя полные b-насыщенные P_n и P_m-множества, полные шапки строятся в аффинной $AG(n + m, 3), AG(n + m + 1,3)$ и проективной $PG(n, 3)$ геометриях для произвольных натуральных чисел n и m, из которых следуют некоторые известные результаты.

4. Используя полные b-насыщенные нечетные P_n-множества, строятся полные шапки в аффинных геометриях $AG(n, 3)$ и $AG(n + 1,3)$, которые обобщают некоторые известные результаты.

5. Если хотя бы два из трех полных b-насыщенных P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}-множеств нечетны, то с помощью конструкции «три» строятся полные шапки в аффинной геометрии $AG(n, 3)$.

6. Если хотя бы P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} из шести полных b-насыщенных P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, P_{n_4}, P_{n_5}, P_{n_6}-множеств нечетны, то с помощью конструкции «шесть» строятся полные шапки в аффинной геометрии $AG(n, 3)$.